



TITLE:

Rough path theory via fractional calculus(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Ito, Yu

CITATION:

Ito, Yu. Rough path theory via fractional calculus. 京都大学, 2015, 博士 (情報学)

ISSUE DATE:

2015-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k19121>

RIGHT:

(続紙 1)

京都大学	博士 (情報学)	氏名	伊藤 悠
論文題目	Rough path theory via fractional calculus (非整数階微積分によるラフパス理論)		
(論文内容の要旨)			
<p>T Lyons によって創始された rough path 理論は、古典的な確率解析に対する経路毎のアプローチを可能にし、更に semimartingale でさえもない確率過程の研究に便利な道具を与えることとなった。この革命的とも言える rough path 理論に対しては、その後 Gubienelli による controlled rough path の理論に代表される様々な異なったアプローチあるいは拡張の試みが為されている。特に、近年のHaier によるregularity structure の理論はKPZ 方程式などの確率偏微分方程式の研究に画期的な新曲面をもたらした。</p> <p>その中でもHu と Nualart は fractional calculus を基礎とした rough path 理論へのアプローチを行った。彼らは regularity の高い関数を対象としていた Zahle によるfractional derivative と Riemann-Stieltjes 積分を用いた方法を拡張することで、Holder 指数が $(1/3, 1/2)$ の関数にそった線積分を定義した。この方法は、Lyons による rough path 理論の別の構成法を与えるとともに、fractional Brownian motion に駆動される確率微分方程式の研究に進展をもたらした。rough path による積分を近似列の極限ではなく直接 fractional derivation によって表現するというこの方法は、積分の量的評価などにおいて多くの利点があるが、適用範囲がHolder 指数が $(1/3, 1/2)$ の範囲に限られており、この制限を緩めることが次の進歩への重要な鍵となっていた。</p> <p>本論文では Hu-Nualart の理論の Holder 指数が $(0, 1/3]$ の領域への拡張を主目的としている。そして、自然数 N に対して、Holder 指数が $(1/(N+1), 1/N]$ の領域を考え、各領域について N に関して帰納的に高次のrough path に対する高次の反復積分を fractional derivative を用いて定義することにより、Holder 指数が $(0, 1/3]$ の領域全てにおいて Hu-Nualart の理論を拡張することに成功している。結果的にHolder 指数が低くなるほど対応する関数による線積分は必然的に複雑な表現を持つことになったが、関数にその関数で定義される線積分の値を対応させる写像の連続性は成り立つことが証明できた。</p> <p>次に、本論文では rough path に沿った 1-form の積分を Gubinelli によって導入された controlled path に沿った 1-form の積分へと拡張した。この一般化により Lyon の extension 写像を従来の Riemann 和の類似物による離散近似の極限としてではなく、直接にfractional derivative の Lebesgue 積分によって表現することに成功し、これによってLyon の extension 定理の別証明が得られた。</p> <p>さらに 本論文ではHolder 指数が $(1/3, 1/2]$ の場合について rough path で駆動されるrough 微分方程式を定式化し、その大域解を構成することに成功している。この大域解の構成においては、本論文で得られたrough path に沿う線積分のfractional derivative による表現が重要な役割を果たしており、Lyon による離散近似の極限を用いた方法に比べれば直接的かつ具体的な解の構成が行われている。</p>			

注) 論文内容の要旨と論文審査の結果の要旨は1頁を38字×36行で作成し、合わせて、3,000字を標準とすること。

論文内容の要旨を英語で記入する場合は、400～1,100 wordsで作成し
審査結果の要旨は日本語500～2,000字程度で作成すること。

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

本論文は、ラフパス解析の基礎理論を非整数階微積分作用素を用いたアプローチにより確立したものである。

T. J. Lyonsが1998年発表の論文で創始したラフパス解析の理論は、滑らかさの度合いの小さな関数に関する微積分学の理論であり、確率解析にその起源を持つ。確率解析において、ブラウン運動に沿った線積分は確率積分により定式化されるブラウン運動に対しては、確率微分方程式の強解を対応させるIto写像は自然な位相について一般に連続ではなく、この事実が技術的な障害をもたらすことは従前より良く認識されていた。ラフパス理論はこの障害を克服することを初期の動機とした、関数とその重複積分に相当する情報の組を一般化したラフパスに対する線積分や微分方程式の理論である。特にラフパス空間の標準位相に関してIto写像の対応物が連続写像となるため、確率解析の様々な議論を見通し良く展開できることが利点である。現在では、従来の確率解析で取り扱えなかったような対象にまでラフパス理論の応用範囲が広がり、更なる発展が期待されている研究分野といえる。

申請者は、ラフパス解析における基本概念であるラフ積分の定義とその定量評価、及びラフ微分方程式の一般論を、非整数階微積分作用素を土台として確立した。Lyonsによる元来のラフ積分の定義は一種のリーマン和の極限として与えられ、極限移行を介さない明示的な表現は得られていなかった。その後、Hu-Nualartが非整数階微積分作用素に基づく定式化を、第2レベルパスまでで全てが統制できる、ヘルダー指数が $1/3$ より大きい場合に行い、ラフ積分の明示的な表現の導出とラフ微分方程式の一般論を展開した。しかしながら彼らの定式化は複雑で、ヘルダー指数が更に小さい場合どのように拡張されるのかは判然としなかった。申請者はHu-Nualartの研究を基に、ラフパス解析の一発展形であるGubinelliの定式化に適合するような形で非整数階微積分作用素による理論構築を行い、特に任意のヘルダー指数に適用可能なラフ積分の明快な定式化と表現式を与えた。その応用として、自然数 n がヘルダー指数の逆数を超えるならば第 $n-1$ レベルまでのパスが第 n レベルまでのパスに一意的に連続拡張されるという定理(Lyonsの拡張定理、ラフパス理論の第1基本定理)において、その拡張写像の明示的な表現を与えることに初めて成功した。これらの具体的な表示式は、定量評価を行う際に従前よりも見通しのよい議論を与えることができる。また、ラフ微分方程式についてGubinelliによる定式化に沿った形で解の存在と一意性を示し、この流儀でも非整数階微積分作用素を用いたアプローチによる理論展開が可能なことを明らかにした。このように、本学位論文では従前の基礎理論を再構築しただけでなく手法の優位性をも明らかにし、今後のラフパス理論の発展において有益な知見を与えるものである。

このように、本論文は確率論・解析学において現在注目を浴び、発展が著しいラフパスの理論に対して非整数階微積分の立場から新しい知見をもたらしたものであり、高い学術的価値が認められる。さらに、平成27年2月13日、本論文の内容と周辺分野に関する学識について口頭による諮問を行い、合格と認めた。以上により、申請者の学位論文は京都大学博士(情報学)の学位基準を満たすものと判断し、京都大学博士(情報学)の申請に相応しいものと判断した。なお、論文調査委員会は、本学位論文全文のインターネット公開に支障が無いものと判断する。

注) 論文審査の結果の要旨の結句には、学位論文の審査についての認定を明記すること。
更に、試問の結果の要旨(例えば「平成 年 月 日論文内容とそれに関連した口頭試問を行った結果合格と認めた。」)を付け加えること。

Webでの即日公開を希望しない場合は、以下に公開可能とする日付を記入すること。
要旨公開可能日： 年 月 日以降